3.3.2 MERKMALE QUADRATISCHER FUNKTIONEN DER FORM $f(x)=ax^2+c$ BESTIMMEN UND BESCHREIBEN

Mike Reblin & Steffen Tschakert

Durch reichhaltige mündliche und schriftliche Aufträge wird der Sprachschatz systematisch aufgebaut und die Schülerinnen und Schüler werden befähigt, höhere sprachliche Anforderungen zu bewältigen. Durch den engen Zusammenhang zwischen fachlichen Lernzielen und den zugehörigen Sprachmitteln ist Wortschatzarbeit ganz eng mit dem jeweiligen mathematischen Thema verbunden. Dabei werden von den Lernenden zunächst Sprachhandlungen eingefordert (z. B. Erläutern von Rechenwegen, Erklären von Bedeutungen, Beschreiben eines Graphen). Die Lernenden versuchen diese Aufträge nun mit ihren eigensprachlichen Mitteln zu bearbeiten, danach werden hilfreiche Sprachmittel (Wörter, Satzbausteine, graphische Darstellungen, grammatische Formen) gesammelt bzw. neu eingeführt und systematisiert. In Anschluss daran werden diese eingeübt und mit dem Vokabular der Fachsprache überformt.

ZUORDNUNG ZU DEN STANDARDS

Standards im Basiscurriculum Sprachbildung

- Informationen aus Texten zweckgerichtet nutzen [G],
- grafische Darstellungen interpretieren und bewerten [G],
- geeignete Textmuster zur Planung eines Textes zweckgerichtet auswählen und nutzen [G],
- Fachbegriffe und fachliche Wendungen nutzen [G].

Standards im Fach

- [L4] Gleichungen und Funktionen [G]
- Terme und Gleichungen für quadratische Zusammenhänge darstellen
- Eigenschaften quadratischer Funktionen beschreiben
- [K5] Mit symbolischen, formalen, technischen Elementen der Mathematik umgehen
- Terme, Gleichungen und grafische Darstellungen zur Beschreibung von Sachzusammenhängen nutzen
- Variablen und Funktionen zur Bearbeitung von Problemstellungen nutzen
- symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache übersetzen und umgekehrt
- mathematische Hilfsmittel und Werkzeuge sachgerecht auswählen und flexibel einsetzen

AUF EINEN BLICK

Jahrgangsstufe, Niveaustufe
9, G

Fach (fachübergreifende Bezüge)
Mathematik

Themen und Inhalte
Bestimmen und Beschreiben von Merkmalen quadratischer Funktionen

Kompetenzbereich(e) im Fach
[L4] Gleichungen und Funktionen

Kompetenzbereich(e) im Basiscurriculum Sprachbildung
Rezeption - Lesen
Produzieren - Schreiben

Zeitbedarf
ca. 3 - 4 Unterrichtsstunden

Materialien
Übersicht der Fachbegriffe; Aufgaben zur Erarbeitung, Aufgaben zur Anwendung, verschiedene GeoGebra-Dateien (Online-Material)

HINWEISE

Die Schülerinnen und Schüler erarbeiten sich zunächst die Eigenschaften quadratischer Funktionen des Typs $f(x)=ax^2+c$ bezüglich der Öffnungsrichtung und Öffnungsweite und der Verschiebung entlang der Ordinatenachse. Sie formulieren ihre Ergebnisse unter Nutzung geeigneter Sprachmittel (Arbeitsblatt: „Fachwörter“). Zur Festigung und Vertiefung bearbeiten die Lernenden Anwendungsaufgaben, die im Kontext einfacher Brückenkonstruktionen in Form von Parabeln stehen (didaktische Reduktion). Der Bearbeitung der Anwendungsaufgaben sollte die Lektüre des kurzen Textes zur Einleitung vorangehen. Im Text wird erläutert, warum es Brücken in Form einer Kettenlinie und in Form einer Parabel gibt.

BAUSTEINE FÜR DEN UNTERRICHT

Thema/Schwerpunkt	Methode und Inhalt	Materialien und Tipps
Bestimmen und Beschreiben von Merkmalen quadratischer Funktionen der Form $f(x)=ax^2+c$	▪ Untersuchung und Beschreibung des Einflusses der Parameter a und c unter Verwendung einer angemessenen Fachsprache mit GeoGebra ▪ Aufgabenstellungen in gestufter Form, unterteilt in zwei Aufgabengruppen: Erarbeitung und Anwendung	▪ Gesamtes GeoGebra-Buch digital: https://ggbm.at/hjtanpqz
Aufgaben zur Erarbeitung	▪ Liste mit Fachwörtern ▪ Untersuchung des Einflusses des Parameters a ▪ Untersuchung des Einflusses des Parameters c ▪ Untersuchung des Einflusses der Parameter a und c auf die Anzahl der Nullstellen und die Lage des Scheitelpunktes ▪ Sonderfall: a=0 ▪ Zuordnung von Funktionsgraphen zu vorgegebenen Gleichungen (Festigung) ▪ Bestimmen von Funktionsgleichungen der Form $f(x)=ax^2+c$ mithilfe des Scheitelpunktes und eines weiteren Punktes der Parabel	▪ Fachwörter: https://ggbm.at/dq6vxxfx ▪ Arbeitsblatt „Fachwörter“ (Anlage 1) ▪ Arbeitsblatt „Erarbeitung“ ▪ (Anlage 2) ▪ https://ggbm.at/z9vkwxsp ▪ https://ggbm.at/ykdtxbh3 ▪ https://ggbm.at/twcjxemd ▪ https://ggbm.at/r4wfxgsr ▪ https://ggbm.at/nucm8p4a ▪ https://ggbm.at/pauvxcnc

Aufgaben zur Anwendung	▪ Vertiefende Aufgabenstellungen mit Anwendungsbezug ▪ Einleitung: Eigenschaft von parabelförmigen Brücken und Brücken in Form einer Kettenlinie und weitere Hinweise zur Modellierung. ▪ Anwendung	▪ Arbeitsblatt „Einleitung und Anwendung“ (Anlage 3) ▪ Einleitung: https://ggbm.at/wwdjdr7j ▪ Anwendungsaufgaben: https://ggbm.at/xzc6f9b8

Zuordnung zu den übergreifenden Themen

- Kulturelle Bildung

Zuordnung zu den Standards des Basiscurriculums Medienbildung

Informieren; Informationsquellen und ihre spezifischen Merkmale

- bei der Bearbeitung von Lern- und Arbeitsaufgaben mediale Quellen gezielt zur Informationsgewinnung und zum Wissenserwerb nutzen (G)

LITERATUR, LINKS UND EMPFEHLUNGEN

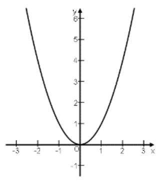
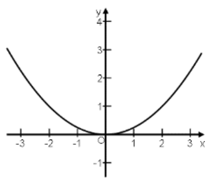
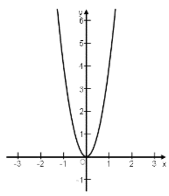
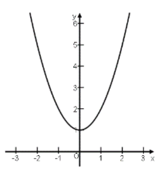
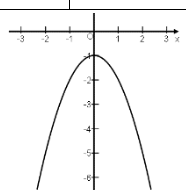
- Lernpfad – Quadratische Funktionen erkunden, verfügbar unter: https://wiki.zum.de/wiki/Quadratische_Funktionen_erkunden, Zugriff am: 26.03.2021.
- Lernpfad – Quadratische Funktionen, verfügbar unter: https://www.mathe-online.at/lernpfade/quadratische_funktionen/?kapitel=2, Zugriff am: 26.03.2021.
- Kreuzworträtsel – Lineare und Quadratische Funktionen, verfügbar unter: https://www.mathe-online.at/materialien/georg.schantl/files/Quadratische_Funktionen/Kreuzwort_Schantl.htm, Zugriff am: 26.03.2021.
- Hintergrundinformationen – Brücken, verfügbar unter: http://www.bernd-nebel.de/bruecken, Zugriff am: 26.03.2021.
- Hintergrundinformationen – Der perfekte Brückenbogen, verfügbar unter: http://www.spiegel.de/wissenschaft/technik/statik-der-perfekte-brueckenbogen-a-1096728.html, Zugriff am: 26.03.2021.
- Fachdidaktische Hintergrundinformationen – Parabeln und Brücken im Mathematikunterricht, verfügbar unter: https://homepage.univie.ac.at/hans.humenberger/Aufsaetze/MU_4-2011_henn_humenberger.pdf, Zugriff am: 26.03.2021.
- Erstellen von Materialien mit GeoGebra – Anleitungen, verfügbar unter: https://www.geogebra.org/m/hDf78XkV, Zugriff am: 26.03.2021.

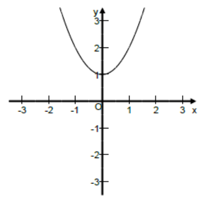
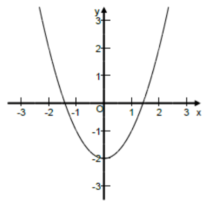
INFORMATIONEN ZU DEN UNTERRICHTSBAUSTEINEN

- Begleitende Hinweisbroschüre, verfügbar unter: https://s.bsbb.eu/hinweise, Zugriff am: 26.03.2021.
- Unterrichtsbausteine für alle Fächer im Überblick, verfügbar unter: https://s.bsbb.eu/ueberblick, Zugriff am: 26.03.2021.

Anlage 1

FACHBEGRIFFE

Funktionsgraph	Bild einer Funktion im Koordinatensystem	
die Parabel	Der Funktionsgraph von quadratischen Funktionen wird als **Parabel** bezeichnet.	
die Normalparabel	Der Funktionsgraph der Funktion $f(x) = x^2$ wird als **Normal-parabel** bezeichnet.	
die Parabel ist **gestaucht**	Eine gestauchte Parabel ist flacher bzw. weiter als die Normalparabel.	
die Parabel ist **gestreckt**	Die Parabel ist steiler bzw. enger als die Normalparabel.	
 die Parabel ist nach oben geöffnet	 die Parabel ist nach unten geöffnet	

<table>
<tr><td>der Scheitelpunkt S</td><td colspan="2">Der Scheitelpunkt S der Parabel ist
<table><tr><td>für $a > 0$</td><td>für $a < 0$</td></tr><tr><td>der tiefste Punkt</td><td>der höchste Punkt</td></tr><tr><td>der Tiefpunkt</td><td>der Hochpunkt</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>die Parabel ist nach oben verschoben</td><td>Der Scheitelpunkt liegt oberhalb der x-Achse.</td><td></td></tr>
<tr><td>die Parabel ist nach unten verschoben</td><td>Der Scheitelpunkt liegt unterhalb der x-Achse.</td><td></td></tr>
<tr><td>die Nullstellen</td><td colspan="2">Nullstellen sind x-Werte von Punkten, in denen der Funktionsgraph die x-Achse schneidet.</td></tr>
</table>

Anlage 2

Erarbeitung: $f(x) = ax^2 + c$

Nutze für die Bearbeitung der Aufgaben in diesem Abschnitt die zur Lernaufgabe gehörende GEOGEBRA-Datei oder folgende diesem Link: https://www.geogebra.org/classic/yh4rrayk (LISUM, CC-BY-SA)

1. Untersuche, welchen Einfluss der Parameter a der Funktion $f(x) = ax^2$ auf den Verlauf des Funktionsgraphen hat. Stelle hierzu den Schieberegler für den Parameter c auf den Wert 0 ein und variiere den Wert für a.
   Formuliere dein Ergebnis als Satz unter Nutzung der in **Anlage 1** angegebenen Fachbegriffe.

2. Untersuche, welchen Einfluss der Parameter c der Funktion $f(x) = x^2 + c$ auf den Verlauf des Funktionsgraphen hat. Stelle hierzu den Schieberegler für den Parameter a auf den Wert 1 ein und variiere den Wert für c.
   Formuliere dein Ergebnis als Satz unter Nutzung der im **Anlage 1** angegebenen Fachbegriffe.

3. Die Parameter *a* und *c* haben auch Einfluss auf die Lage des **Scheitelpunktes *S*** und die Anzahl der Nullstellen.
Untersuche diesen Zusammenhang. Ergänze die Tabelle.

a	*c*	Anzahl der Nullstellen	Begründung
$a > 0$	$c > 0$	keine Nullstelle	*S* liegt oberhalb der *x*-Achse und die Parabel ist nach oben geöffnet
$a > 0$	$c < 0$		
$a < 0$	$c > 0$		
$a < 0$	$c < 0$		
$a > 0$	$c = 0$		
$a < 0$	$c = 0$		

4. Für $a = 0$ handelt es sich nicht um eine quadratische Funktion. Beschreibe die Form und Lage des Graphen für den Fall $a = 0$ und gib an, um welchen Funktionstyp es sich handelt.

5. Vervollständige die Funktionsgleichungen durch Zuordnen der zu den Graphen passenden Funktionsterme. Begründe jeweils deine Entscheidung:

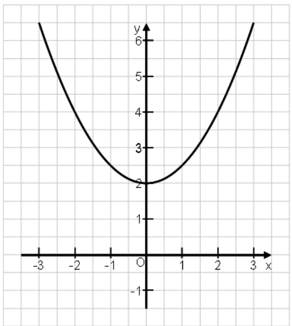
$0{,}5x^2 + 2$

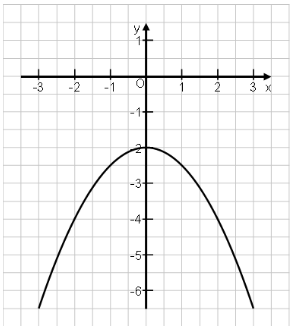
$-0{,}5x^2 + 2$

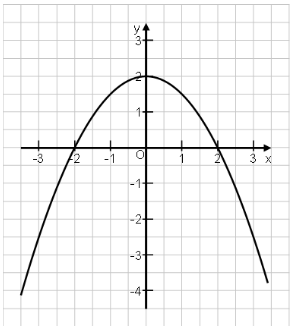
$-0{,}5x^2 - 2$

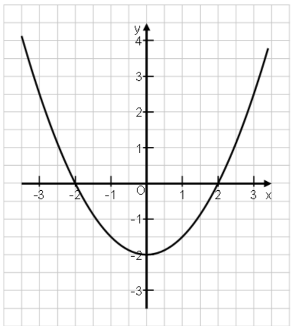
$0{,}5x^2 - 2$

$f_1(x) =$ ________ $f_2(x) =$ ________ $f_3(x) =$ ________ $f_4(x) =$ ________









6. Kennt man zwei Punkte des Graphen der Funktion $f(x) = ax^2 + c$, so kann man die Funktionsgleichung aufstellen.

   a) Paul sagt: „Wenn ich den Scheitelpunkt ablese, kenne ich sofort c.“
   Hat Paul Recht? Begründe.

   b) Paul bestimmt den Scheitelpunkt $S(0|4)$ und den Punkt $P(1|6)$ durch Ablesen aus dem Graphen einer quadratischen Funktion.
   Zur Bestimmung der Funktionsgleichung wählt er den folgenden Ansatz:

   $$f(x) = ax^2 + c$$
   $$6 = a \cdot 1^2 + 4$$

   Begründe den Ansatz. Beende die Rechnung und gib die Funktionsgleichung an.

c) Bestimme jeweils die Parameter a und c der Funktionsgleichung der Funktion $f(x) = ax^2 + c$ und gib die Funktionsgleichung in der Tabelle an. Nutze dein Wissen aus den Teilaufgaben 6 a) und 6 b).

f	Scheitelpunkt S	Parabelpunkt P	Gleichung
f_1	$(0\|3)$	$(2\|0)$	
f_2	$(0\|-2)$	$(4\|6)$	
f_3	$(0\|-9)$	$(-3\|0)$	

d) Zeichne den Graphen der Funktion f_1 aus Aufgabenteil 6 c). Vervollständige hierfür die nachstehende Wertetabelle.

x	-3	-2	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	2	3
$f_1(x)$									

Markiere diejenigen Punkte aus Aufgabenteil 6 c), mit deren Hilfe du die Funktionsgleichung ermittelt hast.

Erläutere, warum es zum Zeichnen sinnvoll ist, im Bereich um den Scheitelpunkt die Schrittweite der Wertetabelle dichter zu wählen.

Anlage 3

Einleitung und Anwendung:

Bogenbrücken

Brücken müssen stabil sein und eine große Last sicher tragen. Dies kann durch Konstruktionen erreicht werden, deren Form annähernd der Form von Funktionsgraphen quadratischer Funktionen entsprechen.

Robert Hooke führte Experimente mit einer hängenden Kette durch, um die Idealform für einen gemauerten Brückenbogen zu finden. 1670 präsentierte er seine Ergebnisse der Royal Society in London. Seine Idee: Hängt man eine Kette zwischen zwei gleich hohen, festen Punkten auf, so ergibt sich eine ganz bestimmte Form für den Bogen. Mathematiker nennen eine Kurve in dieser Form auch Kettenlinie. Wenn man diese Bogenform umdreht, so ergibt sich eine besonders stabile Form für einen Brückenbogen.

Auch heute gelten Brückenbögen in Form einer Kettenlinie als besonders stabil, wenn das Gewicht des Brückenbogens sehr groß im Vergleich zur getragenen Last ist. Manche Brückenbögen besitzen aber auch die Form einer Parabel. Bögen in dieser Form sind besonders stabil, wenn das Gewicht des Brückenbogens sehr klein im Vergleich zur getragenen Last ist.

In der Praxis sind durch die Bauingenieure beim Bau von Brücken eine Vielzahl von weiteren Faktoren zu berücksichtigen (z. B. Temperaturschwankungen oder wie steil eine Brücke gebaut werden muss). Oft
weichen die Formen von Brückenbögen deshalb von der Form der Kettenlinie oder der Parabel ab. Dennoch kann man mithilfe von Parabeln die Formen der meisten Brückenbögen recht gut beschreiben.

Abbildung 1: Alte Svinesundbrücke (Schweden)[1]

Abbildung 2: Neue Svinesundbrücke (Schweden)[2]

Arbeitsauftrag:

Auffällig ist an machen Brücken die große Zahl an „Liebesschlössern“ (eine Tradition, die laut Wikipedia aus Italien stammt). Verliebte Paare bringen am Brückengeländer mit Gravur versehene Schlösser an, als Symbol ihrer ewigen Liebe.

Daraus ergeben sich für eine bestimmte Brücke verschiedene Fragestellungen:

Wie viel Gewicht muss eine Brücke durch die befestigten Liebesschlösser zusätzlich tragen, wenn das gesamte Brückengeländer mit Liebesschlössern vollständig ausgefüllt ist?

Wie viele Liebesschlösser wären nötig, damit eine andere Brückenform vorteilhafter wird?

Hinweis:

Bei dieser Aufgabe handelt es sich um eine sogenannte Fermi-Aufgabe (benannt nach dem italienischen Kernphysiker und Nobelpreisträger Enrico Fermi (1901-1954). Er war dafür bekannt, dass er seinen Studenten oft scheinbar sonderbare Fragen stellte. Auf diese Weise forderte und förderte er ihr Denkvermögen (zum Beispiel: „Wie viele Klavierstimmer gibt es in Chicago?").

Deine Erkenntnisse zu den Graphen quadratischer Funktionen kannst du jetzt nutzen, um Brückenbauten zu untersuchen.

7. Eine 200 m lange Brücke wird von einer parabelförmigen Konstruktion gestützt. Die Höhe der Brücke über dem Grund beträgt 80 m.

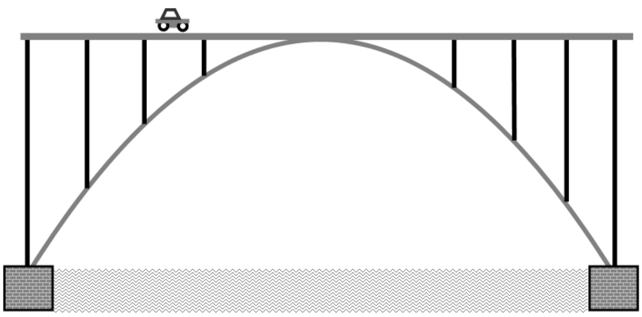


Abbildung 3: Brücke – Aufgabe 7[3]

Bestimme die Funktionsgleichung der Parabel, welche den Brückenbogen beschreibt. Lege zuerst ein geeignetes Koordinatensystem fest.

[1] Wikimedia, verfügbar unter: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Svinesundbrua_(gamle)_026.JPG; CC0; Zugriff am: 26.03.2021.

[2] Wikimedia, verfügbar unter: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/ce/Svinesundbrua_014.JPG; CC0; Zugriff am: 26.03.2021.

[3] Abbildung 3: Reblin, LISUM; CC-BY.

8. Die Fahrbahn einer Straßenbrücke soll durch eine parabelförmige Konstruktion getragen werden (Tragegerüst). Die *x*-Achse beschreibt den Verlauf einer Straße. Diese trifft an den Punkten *A* und *B* mit dem Parabelbogen zusammen. Die folgende Abbildung stellt diesen Sachverhalt dar (Maßstab: 1 LE entspricht 1 m).

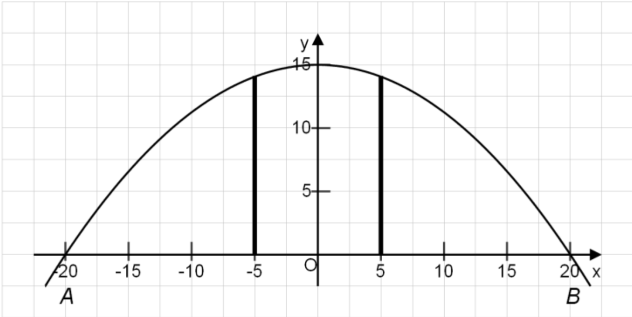


Abbildung 4: Tragegerüst Straßenbrücke – Aufgabe 8[4]

a) Begründe, dass die Funktionsgleichung $f(x) = -\frac{3}{80}x^2 + 15$ den Verlauf des Brückenbogens beschreibt.
b) Bestimme die beiden Punkte, an denen der Brückenbogen auf die Fahrbahn trifft durch eine geeignete Rechnung. Gib an, wie weit die beiden Punkte voneinander entfernt sind.
c) Jeweils 5 m von der Brückenmitte entfernt wird die Straße durch senkrechte Streben mit dem parabelförmigen Tragegerüst verbunden. Berechne die Länge dieser Streben.

[4] Abbildung 4: Mierig, LISUM; CC-BY.