



**Abschlussprüfung
an der Berufsoberschule/FOS 13 im Schuljahr 2022/2023**

Fach	Mathematik (B)
Nur für die Lehrkraft	
Prüfungstag	31.05.2023
Prüfungszeit	09:00 – 13:00 Uhr
Zugelassene Hilfsmittel	Nicht graphikfähiger Taschenrechner mit gelöschtem Programmiereteil, kein CAS-Rechner, Handbuch/Gebrauchsanleitung muss vorliegen, Formelsammlung, Rechtschreib-Wörterbuch (siehe Aufgabendeckblatt)
Allgemeine und spezielle Arbeitshinweise	Beachten Sie bitte das Schülerdeckblatt.
Erwartungshorizonte	<p>Die Beschreibungen der erwarteten Leistungen enthalten keine vollständigen Lösungen, sondern nur kurze Angaben. Hier nicht genannte, aber gleichwertige Lösungswege sind gleichberechtigt.</p> <p>Die aufgeführten Lösungswege zeigen immer nur eine Variante auf. Für andere Lösungswege oder Lösungsansätze, die schlüssig dargestellt werden und zu richtigen Zwischen- oder Endergebnissen führen, sind die vorgesehenen Bewertungseinheiten (BE) entsprechend zu vergeben. Wird jedoch der im Erwartungshorizont dargestellte Lösungsweg vom Prüfling verwendet, so sind die BE in der angegebenen Weise aufzuteilen. Damit die Möglichkeit besteht, den eigenen didaktischen Aspekten bei der Bewertung genug Raum zu geben, werden in der Regel die BE nicht kleinschrittig zugeordnet. Die Summe der BE pro Teilaufgabe ist verbindlich.</p> <p>Sind Zwischenergebnisse nicht korrekt ermittelt worden und die sich auf diesen Zwischenergebnissen aufbauenden weiteren Lösungswege schlüssig und nicht mit neuen Fehlern versehen, so sind die BE entsprechend zu erteilen (Folgefehler). Dieses Vorgehen ist nicht anzuwenden, wenn eine offensichtlich nicht sinnvolle Lösung unkommentiert bleibt oder der Lösungsweg durch den Fehler erheblich einfacher geworden ist.</p> <p>Die Verwendung von entsprechenden Operatoren in den Aufgabenstellungen erfordert vom Prüfling schriftliche Erläuterungen seiner Überlegungen. Bei der Bewertung dieser Erläuterungen, auf deren Darstellung im Erwartungshorizont weitgehend verzichtet wird, kann die Lehrkraft ihren pädagogischen Spielraum nutzen und sich an ihrer bisherigen Unterrichtspraxis orientieren. Im Erwartungshorizont wird teilweise auf formale mathematische Vollständigkeit verzichtet, wenn diese vom Schüler in der Regel nicht unbedingt zu erwarten ist.</p>

Aufgabe Nr.	Soll
1	33
2	34
3	33
Summe:	100



1 Exponentialfunktion

/33

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = 4x \cdot e^{-0,5x^2}$, $D_f = \mathbb{R}$.

Ihr Graph ist mit G_f bezeichnet.

1.1 Berechnen Sie die Nullstelle von f .

/2

1.2 Bestimmen Sie Art und Lage der Extrempunkte von G_f .

/7

[Zur Kontrolle: $f'(x) = 4(-x^2 + 1) \cdot e^{-0,5x^2}$; ohne Nachweis darf verwendet werden:

$$f''(x) = 4(x^3 - 3x) e^{-0,5x^2}]$$

1.3 Zeigen Sie, dass der Graph von f punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist.

/5

Geben Sie das Symmetrieverhalten der Graphen von f' und f'' an.

1.4 Ergänzen Sie die Wertetabelle. Runden Sie auf eine Kommastelle.

/6

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$	0			1,9			0,1

Zeichnen Sie G_f unter Verwendung aller Ihrer bisherigen Ergebnisse im Intervall $-3 \leq x \leq 3$ in das **Koordinatensystem auf der nächsten Seite**.

1.5 Ermitteln Sie die Wendestelle x_w für die $x_w > 0$ gilt.

/5

[Hinweis: Auf den Nachweis mit dem hinreichenden Kriterium kann verzichtet werden.]

Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente an dieser Stelle.

[Hinweis: Rechenergebnisse können auf eine Stelle nach dem Komma gerundet werden.]

1.6 Der Graph G_g der Funktion g entsteht durch die Spiegelung des Graphen G_f an der x -Achse.

/3

Zeichnen Sie auch G_g im Intervall $-3 \leq x \leq 3$ in das **Koordinatensystem auf der nächsten Seite** ein.

Geben Sie eine Gleichung der Funktion g an.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

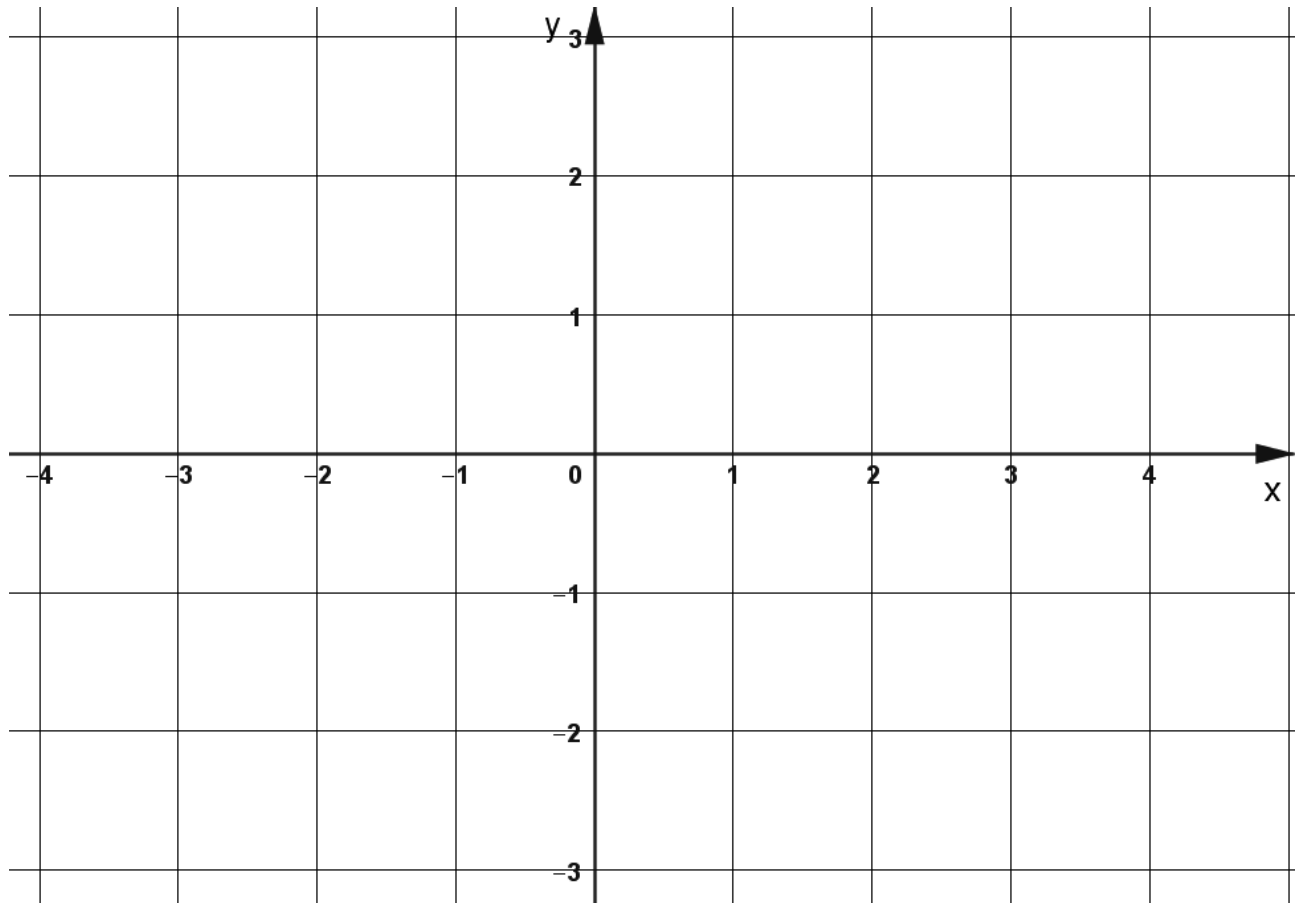
1.7 Weisen Sie nach, dass $F(x) = -4 \cdot e^{-0,5x^2}$ eine Stammfunktion von f ist. /5

Für jeden Wert $m > 0$ schließen die Graphen der Funktionen f und g und die Geraden $x = m$ und $x = -m$ eine Fläche ein.

Ermitteln Sie den Term $A(m)$, der den Flächeninhalt dieser Fläche in Abhängigkeit von m beschreibt.

Untersuchen Sie das Verhalten von $A(m)$ für $m \rightarrow \infty$.

Koordinatensystem zu Aufgabe 1.4 und 1.6



2 Gebrochenrationale Funktionen**/34**Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{x^3 - 9x^2 + 24x - 16}{x^2 - 4x + 4} = \frac{(x-4)(x^2 - 5x + 4)}{x^2 - 4x + 4}.$$

- 2.1** Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion f an. **/5**
Weisen Sie nach, dass der Graph eine Polstelle hat.
Bestimmen Sie das Verhalten des Graphen von f in der Umgebung der Polstelle.

- 2.2** Geben Sie den Schnittpunkt des Graphen von f mit der y -Achse an. **/4**
Ermitteln Sie alle Nullstellen der Funktion f .

- 2.3** Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Funktionsgleichung von f geschrieben werden kann in der Form **/6**

$$f(x) = x - 5 + \frac{4}{(x-2)^2}.$$

Geben Sie die Gleichung der Asymptoten von f an.
Zeichnen Sie die Asymptote in das **Koordinatensystem auf der nächsten Seite** ein.
Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von f für $x \rightarrow \pm\infty$ an.

- 2.4** Ermitteln Sie die erste Ableitung von f . **/3**
Verwenden Sie dabei die Schreibweise der Funktionsgleichung von f aus Teilaufgabe 2.3.

[Zur Kontrolle: f' kann geschrieben werden in der Form $f'(x) = 1 - \frac{8}{(x-2)^3}$.]

- 2.5** Weisen Sie nach, dass der Graph von f genau einen Extrempunkt hat. **/4**
Bestimmen Sie die Koordinaten und die Art des Extrempunktes.

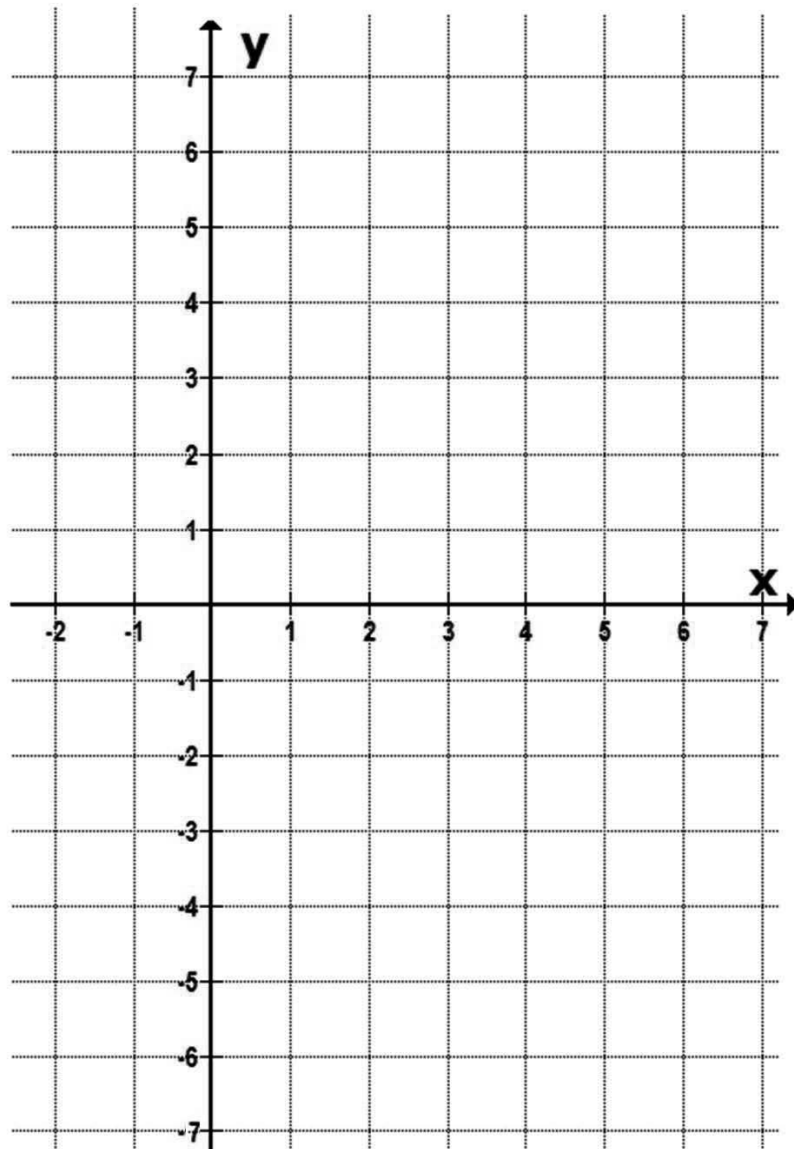
[Hinweis: Ohne weitere Rechnung dürfen Sie verwenden $f''(x) = \frac{24}{(x-2)^4}$.]

- 2.6** Ergänzen Sie die Wertetabelle. Runden Sie auf eine Nachkommastelle. **/6**

x	-2	-1	0	1	3	4	5	7
$f(x)$		-5,6						2,2

Zeichnen Sie unter Verwendung Ihrer oben berechneten Ergebnisse und der Wertetabelle den Graphen von f im Intervall $[-2; 7]$ in das **Koordinatensystem auf der nächsten Seite** ein.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

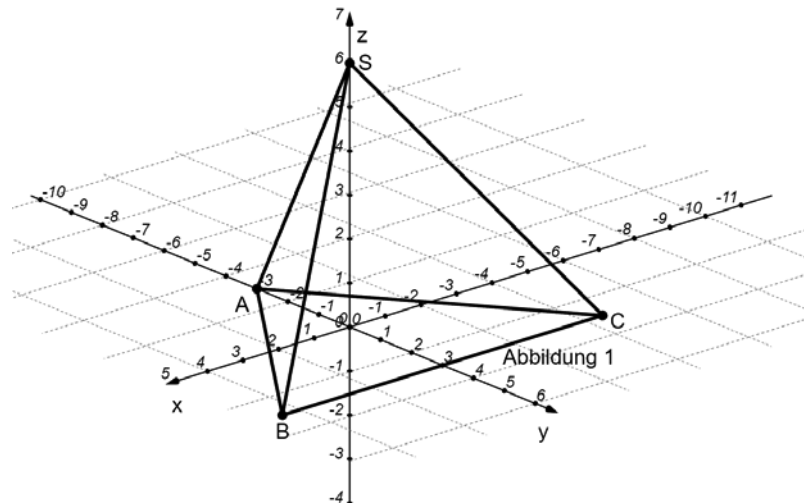


- 2.7** Ermitteln Sie eine Stammfunktion F von f . **/2**
Verwenden Sie dabei die Schreibweise der Funktionsgleichung von f aus Teilaufgabe 2.3.
- 2.8** Der Graph von f , die Gerade mit der Gleichung $g(x) = x - 1$ und die x -Achse schließen eine Fläche ein. **/4**
Begründen Sie, dass der Flächeninhalt dieser Fläche kleiner als 3 FE sein muss. Beschreiben Sie, wie der Flächeninhalt dieser Fläche exakt berechnet werden kann.
[Hinweis: Der Flächeninhalt muss dabei nicht ausgerechnet werden.]

3 Analytische Geometrie

/33

Die Grundfläche einer Pyramide $ABCS$ ist das Dreieck ABC . Die Koordinaten der Eckpunkte der Pyramide sind $A(0|-3|0)$, $B(4,5|3|0)$, $C(-4,5|3|0)$ und $S(0|0|6)$ (siehe Abbildung 1).



3.1 Weisen Sie nach, dass das Dreieck ABC gleichschenkelig ist. /3

3.2 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC und das Volumen der Pyramide. /5

3.3 Die Richtung paralleler Sonnenstrahlen kann beschrieben werden durch den Vektor /3

$\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$. Die Spitze S der Pyramide hat einen Schattenpunkt S^* in der x - y -Ebene.

Ermitteln Sie die Koordinaten von S^* .

3.4 Das Dreieck BCS liegt in einer Ebene E . /6

Geben Sie eine Gleichung der Ebene E in Parameterform an.

Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in Koordinatenform.

[Zur Kontrolle: $E: 2y + z = 6$.]

3.5 Für einen Punkt P in der Ebene E ist der Abstand zum Punkt A minimal. /6

Ermitteln Sie die Koordinaten dieses Punktes P und seinen Abstand zum Punkt A .

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Die Ebene F mit der Gleichung $F: 2x - 3y + 3z = 6$ schneidet die Pyramide $ABCS$.

- 3.6** Ermitteln Sie die Schnittpunkte der Ebene F mit den drei Koordinatenachsen. **/3**
- 3.7** Berechnen Sie den Winkel zwischen der Ebene E und der Ebene F . **/3**
- 3.8** Die Gerade durch die Punkte C und S hat einen Schnittpunkt Q mit der Ebene F . **/4**
Untersuchen Sie, ob dieser Schnittpunkt innerhalb der Strecke \overline{CS} liegt.



Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

Teil- aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
1.1	$f(x) = 0$ $4x \cdot e^{-0,5x^2} = 0$ $x = 0$	2		
1.2	$f'(x) = 4 \cdot e^{-0,5x^2} + 4x \cdot (-x) \cdot e^{-0,5x^2} = (4 - 4x^2)e^{-0,5x^2}$ notwendiges Kriterium: $f'(x) = 0$ $0 = 4(-x^2 + 1)e^{-0,5x^2}$ $0 = -x^2 + 1$ $x_{1/2} = \pm 1$ hinreichendes Kriterium: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$ $f''(1) < 0$ (Maximum); $f''(-1) > 0$ (Minimum) $f(1) \approx 2,4$; $f(-1) \approx -2,4$; $H(1 2,4)$; $T(-1 -2,4)$	3	4	
1.3	$f(-x) = 4 \cdot (-x) \cdot e^{-0,5(-x)^2} = -4x \cdot e^{-0,5x^2} = -f(x)$ Damit ist der Graph von f punktsymmetrisch zum Ursprung. f' ist achsensymmetrisch zur y -Achse. f'' ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.	3	2	

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung								BE/AB		
									I	II	III
1.4	x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	2	4	
	f(x)	0	1,8	2,4	1,9	1,1	0,4	0,1			
	<p>Hinweis: Der gestrichelt dargestellte Graph gehört zur Aufgabe 1.6</p>										
1.5	notwendiges Kriterium: $f''(x) = 0$ $0 = 4(x^3 - 3x)e^{-0,5x^2}$ $x(x^2 - 3) = 0$ $x_1 = 0 \wedge x_{2/3} = \pm\sqrt{3}$ $x_w = \sqrt{3} \approx 1,7$ ist gesuchte Lösung hinreichendes Kriterium: entfällt $f'(\sqrt{3}) \approx -1,8; f(\sqrt{3}) \approx 1,6$ Damit ergibt sich Wendetangente: $y = -1,8x + 4,6$								3		
1.6	Zeichnung siehe Graph zu 1.4 Gleichung: $g(x) = -f(x) = -4x \cdot e^{-0,5x^2}$									3	

Teil- aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
1.7	<p>z. z.: $F'(x) = f(x)$</p> $F'(x) = -4 \cdot (-x) \cdot e^{-0,5x^2} = 4x \cdot e^{-0,5x^2} = f(x)$ <p>Aufgrund der Achsensymmetrie der Graphen G_f und G_g zur x-Achse und der Punktsymmetrie zum Ursprung beider Graphen, genügt es, einen Term für das Integral $\int_0^m f(x) dx$ aufzustellen. Das Vierfache dieses Terms ist dann $A(m)$:</p> $A(m) = 4 \cdot \int_0^m 4x \cdot e^{-0,5x^2} dx = 4 \left[-4 \cdot e^{-0,5x^2} \right]_0^m$ $A(m) = 4 \left(-4 \cdot \left(e^{-0,5m^2} - 1 \right) \right) = -16 \left(e^{-0,5m^2} - 1 \right)$ <p>Dass die Klammer den Grenzwert -1 hat, kann sowohl durch Testeinsetzungen, als auch durch $\lim_{m \rightarrow \infty} e^{-0,5m^2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{0,5m^2}} = 0$ begründet werden. Der Grenzwert ist also 16.</p>			2
				3
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	13	15	5
	Summe der BE	33		

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
2.1	$N(x) = 0 \Leftrightarrow 0 = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \Rightarrow x_{1/2} = 2$ doppelte Lösung $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ $Z(2) = 4 \neq 0 \Rightarrow$ Polstelle bei $x = 2$ ohne VZW, da $x = 2$ eine doppelte Lösung von $N(x) = 0$ ist. (alternativ: Testeinsetzungen)	5		
2.2	Schnitt mit der y -Achse: $f(0) = -4 \Rightarrow S_y(0 -4)$ Bedingung Nullstelle: $f(x_N) = 0 \Leftrightarrow Z(x_N) = 0$ Rechnung: $\underbrace{(x-4)}_{\Rightarrow x_1=4} \underbrace{(x^2 - 5x + 4)}_{\text{pq-Formel}} = 0$ Mit der pq-Formel folgt: $x_{2/3} = 2,5 \pm \sqrt{2,25} \Rightarrow x_2 = 4; x_3 = 1.$ Es gibt zwei Nullstellen $x_1 = x_2 = 4; x_3 = 1.$	1		
2.3	Nachweis durch Erweitern mit $(x-2)^2$: $x - 5 + \frac{4}{(x-2)^2} = \frac{(x-5)(x^2 - 4x + 4) + 4}{x^2 - 4x + 4}$ $= \frac{(x^3 - 9x^2 + 24x - 16)}{x^2 - 4x + 4}$ Nachweis alternativ mittels Polynomdivision möglich: $(x^3 - 9x^2 + 24x - 16) : (x^2 - 4x + 4) = x - 5 + \frac{4}{x^2 - 4x + 4}$ Die Asymptote ist $a(x) = x - 5$. Zeichnen der Asymptote. Verhalten der Funktionswerte von f im Unendlichen: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} a(x) = +\infty$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a(x) = -\infty$		3	
2.4	Anwenden der Quotientenregel: $f'(x) = \left[x - 5 + 4(x-2)^{-2} \right]' = 1 + (-2) \cdot 4 \cdot (x-2)^{-3} = 1 - \frac{8}{(x-2)^3}$			3

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB																				
		I	II	III																		
2.5	<p>Bedingung Extremstellen: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$</p> <p>mögliche Extremstellen (notwendige Bedingung): $f'(x) = 0$</p> $1 - \frac{8}{(x-2)^3} = 0 \Leftrightarrow 1 = \frac{8}{(x-2)^3}$ $\Leftrightarrow (x-2)^3 = 8$ $\Leftrightarrow \underline{x_E = 4 \in ID_f}$ <p>Prüfen der Art der Extremstelle (hinreichende Bedingung): $f''(x) \neq 0$</p> $f''(x) = \frac{24}{(4-2)^4} = 1,5 > 0, \text{ also Tiefpunkt}$ <p>Angabe der Koordinaten des Extrempunkts: $f(4) = 0$; <u>$T(4 0)$</u></p>			4																		
2.6	<table border="1" style="margin-bottom: 10px;"> <tr> <td>x</td> <td>-2</td> <td>-1</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>7</td> </tr> <tr> <td>f(x)</td> <td>-6,8</td> <td>-5,6</td> <td>-4</td> <td>0</td> <td>2</td> <td>0</td> <td>0,4</td> <td>2,2</td> </tr> </table> <p>Hinweis: Die Grafik beinhaltet die Lösungen der Teilaufgaben 2.3 und 2.6</p>	x	-2	-1	0	1	3	4	5	7	f(x)	-6,8	-5,6	-4	0	2	0	0,4	2,2	3		3
x	-2	-1	0	1	3	4	5	7														
f(x)	-6,8	-5,6	-4	0	2	0	0,4	2,2														

Teil- aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
2.7	Eine Stammfunktion von f in der vorgegebenen Darstellungsform ist: $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x - \frac{4}{x-2}$		2	
2.8	Die Fläche ist enthalten in dem Dreieck mit den Eckpunkten (1 0), (3 2) und (4 0). Dieses Dreieck hat einen Flächeninhalt von $\frac{3 \cdot 2}{2} = 3$ FE. Die Schnittpunkte von f und g sind (1 0) und (3 2). Im Intervall [1;3] begrenzt die Gerade g die Fläche, im Intervall [3;4] begrenzt der Graph von f die Fläche. Für diese beiden Intervalle müssen die Integrale über g bzw. f berechnet werden.			4
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	12	18	4
	Summe der BE	34		

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
3.1	Es ist $ \overline{AB} = \overline{AC} = \left(\sqrt{(-4,5)^2 + 6^2} = \sqrt{56,25}\right)$, also ist das Dreieck ABC gleichschenkelig.	3		
3.2	Grundfläche mittels Kreuzprodukt der Vektoren \overline{AB} und \overline{AC} : $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 54 \end{pmatrix}$ $A = \frac{1}{2} \cdot \vec{n} = \frac{1}{2} \cdot 54 = 27$ (FE) Eine alternative Lösung mittels $A = \frac{g \cdot h_g}{2}$ ist auch möglich. $h_{\text{Pyramide}} = z_s = 6$, $V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h_{\text{Pyramide}} = 54$ (VE)	3		
3.3	$g_s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$; $z = 0$ also $s = 2$; $S^*(2 6 0)$.	3		
3.4	Ebenengleichung in Parameterform: z. B. $E: \vec{x} = \overline{OS} + s \cdot \overline{SB} + t \cdot \overline{SC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4,5 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4,5 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ Ebenengleichung in Koordinatenform: Ein Normalenvektor ist $\vec{n} = \overline{SB} \times \overline{SC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 54 \\ 27 \end{pmatrix} = 27 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Somit ist $E: 2y + z = d$. Einsetzen des Punktes S liefert $E: 2y + z = 6$.		2	
3.5	Der Abstand wird minimal, wenn die Gerade durch P und A senkrecht auf E steht. Aufstellen der Geradengleichung durch P und A mit dem Normalenvektor von E als Richtungsvektor: $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $h \cap E \Rightarrow 2(-3 + 2s) + 1s = 6 \Rightarrow s = 2,4$. Also $P(0 1,8 2,4)$ und $ \overline{AP} = \sqrt{4,8^2 + 2,4^2} \approx 5,37$ (LE)		4	2
3.6	$S_x(3 0 0)$; $S_y(0 -2 0)$; $S_z(0 0 2)$	3		

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
3.7	<p>Schnittwinkel:</p> $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_F = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\cos(\alpha) = \frac{ \vec{n}_E \cdot \vec{n}_F }{ \vec{n}_E \cdot \vec{n}_F } = \frac{3}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{22}} \approx 0,286$ $\alpha = 73,4^\circ$		3	
3.8	$g_{CS}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4,5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4,5 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \text{ in F einsetzen:}$ $2(-4,5 + 4,5r) - 3(3 - 3r) + 3(6r) = 6, r = \frac{2}{3}, Q(-1,5 1 4).$ <p>Weil $0 \leq r \leq 1$ erfüllt ist, liegt der Punkt auf der Strecke \overline{CS}.</p>			4
Summen der BE in den Anforderungsbereichen		14	15	4
Summe der BE		33		