Abschlussprüfung an der Fachoberschule im Schuljahr 2022/2023

Fach	Mathematik (A)
Nur für die Lehrkraft	
Prüfungstag	**03.05.2023**
Prüfungszeit	09:00 – 13:00 Uhr
Zugelassene Hilfsmittel	Nicht graphikfähiger Taschenrechner mit gelöschtem Programmierteil, kein CAS-Rechner, Handbuch/Gebrauchsanleitung muss vorliegen, Formelsammlung, Rechtschreib-Wörterbuch (siehe Aufgabendeckblatt)
Allgemeine und spezielle Arbeitshinweise	**Beachten Sie bitte das Schülerdeckblatt.**
Erwartungs-horizonte	Die Beschreibungen der erwarteten Leistungen enthalten keine vollständigen Lösungen, sondern nur kurze Angaben. Hier nicht genannte, aber gleichwertige Lösungswege sind gleichberechtigt. Die aufgeführten Lösungswege zeigen immer nur eine Variante auf. Für andere Lösungswege oder Lösungsansätze, die schlüssig dargestellt werden und zu richtigen Zwischen- oder Endergebnissen führen, sind die vorgesehenen Bewertungseinheiten (BE) entsprechend zu vergeben. Wird jedoch der im Erwartungshorizont dargestellte Lösungsweg vom Prüfling verwendet, so sind die BE in der angegebenen Weise aufzuteilen. Damit die Möglichkeit besteht, den eigenen didaktischen Aspekten bei der Bewertung genug Raum zu geben, werden in der Regel die BE nicht kleinschrittig zugeordnet. Die Summe der BE pro Teilaufgabe ist verbindlich. Sind Zwischenergebnisse nicht korrekt ermittelt worden und die sich auf diesen Zwischenergebnissen aufbauenden weiteren Lösungswege schlüssig und nicht mit neuen Fehlern versehen, so sind die BE entsprechend zu erteilen (Folgefehler). Dieses Vorgehen ist nicht anzuwenden, wenn eine offensichtlich nicht sinnvolle Lösung unkommentiert bleibt oder der Lösungsweg durch den Fehler erheblich einfacher geworden ist. Die Verwendung von entsprechenden Operatoren in den Aufgabenstellungen erfordert vom Prüfling schriftliche Erläuterungen seiner Überlegungen. Bei der Bewertung dieser Erläuterungen, auf deren Darstellung im Erwartungshorizont weitgehend verzichtet wird, kann die Lehrkraft ihren pädagogischen Spielraum nutzen und sich an ihrer bisherigen Unterrichtspraxis orientieren. Im Erwartungshorizont wird teilweise auf formale mathematische Vollständigkeit verzichtet, wenn diese vom Schüler in der Regel nicht unbedingt zu erwarten ist.

Aufgabe Nr.	Soll
1	40
2	30
3	30
Summe:	100

1 Funktionsuntersuchung /40

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung

$f(x) = -4x^3 + 12x^2 + 64$; $x \in$ IR.

1.1 Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von f im Unendlichen an. **/2**

1.2 Geben Sie den Schnittpunkt des Graphen von f mit der y-Achse an. **/5**
Weisen Sie nach, dass der Graph von f nur einen Schnittpunkt mit der x-Achse besitzt.
[Hinweis: Die Funktionsgleichung von f lässt sich auch in der folgenden Form schreiben: $f(x) = (4 - x) \cdot (4x^2 + 4x + 16)$.]

1.3 Ermitteln Sie die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen der Funktion f und bestimmen Sie, um welche Art von Extrempunkt es sich jeweils handelt. **/8**

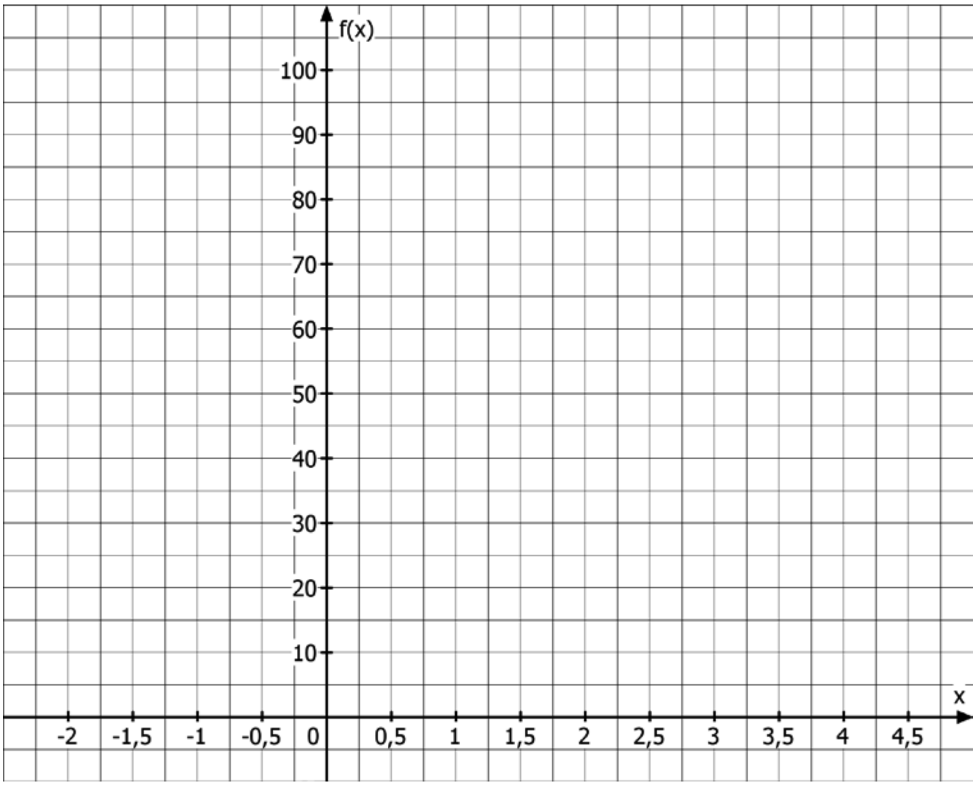
1.4 Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f an der Stelle $x_W = 1$ einen Wendepunkt besitzt. **/5**
Geben Sie die Gleichung der Wendetangente t_W an.

1.5 Ergänzen Sie die folgende Wertetabelle. **/5**

x	–1,5	–1,0	0	1,0	2,0	3,0	4,0
$f(x)$							

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f in **das Koordinatensystem auf der folgenden Seite**.

Fortsetzung auf der nächsten Seite



Eine abgelegene Wetterstation wird mit einem Akku betrieben. Der Akku wird von Solarzellen aufgeladen. Das geschieht je nach Sonneneinstrahlung unterschiedlich stark. Der Graph der Funktion *f* stellt den Ladezustand eines Akkus an einem Wintertag dar. Dabei gibt *x* die Zeit in Stunden ($x = 0$ entspricht 12:00 Uhr) und $f(x)$ den Ladezustand des Akkus in Prozent an.

1.6 Erklären Sie, weshalb der Ladezustand lediglich im Zeitraum von ca. 10:35 Uhr bis 16:00 Uhr sinnvoll durch den Graphen der Funktion *f* beschrieben werden kann. **/3**

1.7 Geben Sie den Zeitraum an, in dem die Solarzellen mehr Energie liefern, als die Wetterstation verbraucht.
Begründen Sie Ihre Aussage. **/3**

An einem Herbsttag kann der Ladezustand der Akkus für einen bestimmten Zeitraum durch den Graphen der Funktion *g* beschrieben werden mit der Funktionsgleichung

$$g(x) = -\frac{1}{10}x^4 + ax^2 + 60.$$

An diesem Tag hat der Akku um 15:00 Uhr ($x = 3$) einen Ladezustand von 87,9 %.

1.8 Bestimmen Sie den Wert des Parameters *a*. **/2**

1.9 Berechnen Sie für $a = 4$, nach wie vielen Stunden der Akku an dem Herbsttag vollständig entladen war. **/7**

2 Integralrechnung /30

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung:

$f(x) = 0{,}5x^3 - 2{,}5x^2 + x + 4.$

Der Graph von f ist in Abbildung 1 dargestellt.

Geben Sie alle Endergebnisse mit zwei Nachkommastellen an.

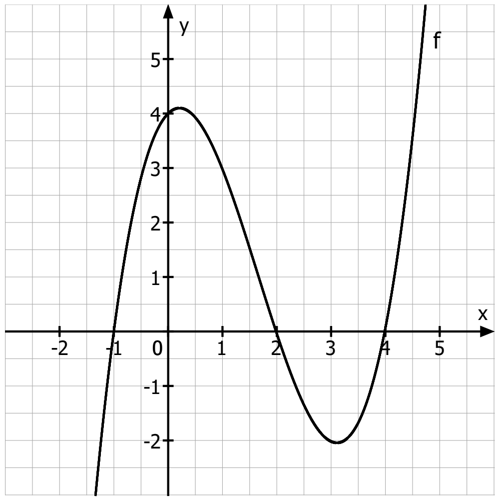


Abbildung 1

2.1 Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Graph der Funktion f an den Stellen $x_{N1} = -1$; $x_{N2} = 2$ und $x_{N3} = 4$ eine Nullstelle besitzt. **/3**

2.2 Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f und die x-Achse vollständig einschließen. **/6**

2.3 Der Graph einer quadratischen Funktion g schneidet die y-Achse bei $y = 2$ und die x-Achse bei $x_1 = -1$ und $x_3 = 4$.
Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung von g in der Form $g(x) = ax^2 + bx + c$. **/5**

2.4 Bestimmen Sie rechnerisch die Schnittstellen der Graphen von f und g.
[Hinweis: Falls in 2.3 keine Lösung gefunden wurde, verwenden Sie:
$g(x) = -0{,}5x^2 + 1{,}5x + 2$] **/7**

2.5 Der Graph von g und die x-Achse schließen die Fläche A_1 ein (graue Fläche in Abbildung 2).
Berechnen Sie den Flächeninhalt A_1, der Fläche zwischen der Parabel und der x-Achse.
[Hinweis: Falls in 2.3 keine Lösung gefunden wurde, verwenden Sie:
$g(x) = -0{,}5x^2 + 1{,}5x + 2$] **/3**

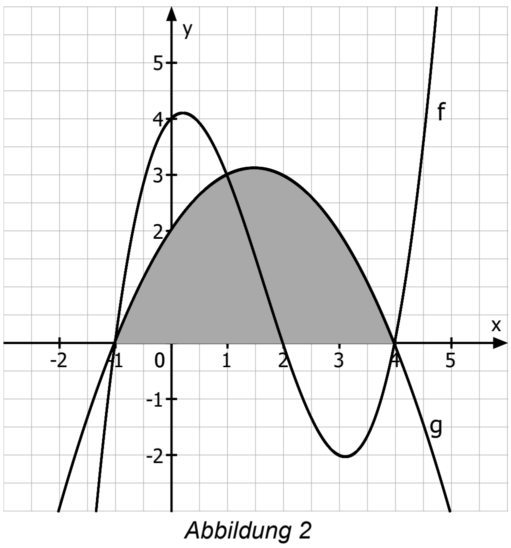


Abbildung 2

Fortsetzung auf der nächsten Seite

2.6 Der Graph von *f* teilt die Fläche $A_1 = 10{,}42$ in zwei Teilflächen A_2 und A_3.
Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Flächeninhalte dieser beiden Teilflächen gleich groß sind.
[Hinweis: Sollten Sie 2.4 nicht gelöst haben, verwenden Sie $x_1 = 1$ als Schnittstelle.] **/6**

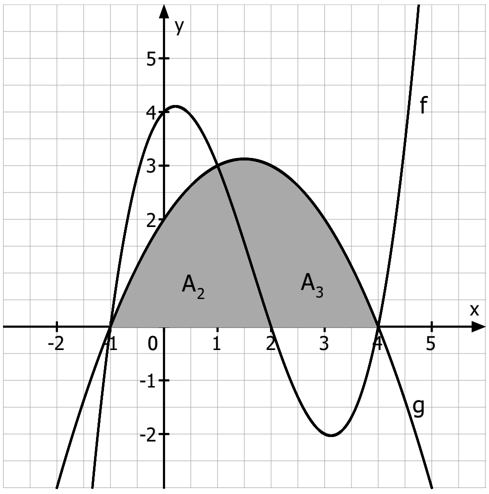


Abbildung 3

3 Stochastik /30

Drei Münzen werden gleichzeitig geworfen.
Jede Münze kann Kopf oder Zahl zeigen.

3.1 Betrachtet wird das Ereignis **/2**
A: Alle drei Münzen zeigen Kopf oder alle drei Münzen zeigen Zahl.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit $P(\mathrm{A})$.

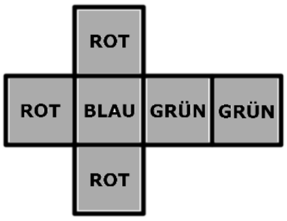
3.2 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Wurf genau zwei der drei Münzen Kopf zeigen. **/2**

Mit diesen Münzen wird ein Spiel gespielt.
Für den Spieler beträgt der Spieleinsatz für einen Wurf 1,00 €.
Wenn bei dem Wurf dreimal Kopf oder dreimal Zahl erscheint, werden an den Spieler 3,00 € ausgezahlt.

3.3 Zeigen Sie, dass dieses Spiel nicht fair ist. **/2**
Begründen Sie Ihre Entscheidung.

3.4 Ermitteln Sie, wie hoch die Auszahlung an den Spieler sein müsste, damit der Spieler auf lange Sicht keinen Verlust macht. **/2**

Bei einem anderen Spiel wird ein Würfel verwendet, der auf drei Seiten mit ROT, auf zwei Seiten mit GRÜN und auf einer Seite mit BLAU beschriftet ist.
Jede der sechs Seiten erscheint beim Würfeln mit der gleichen Wahrscheinlichkeit.
Das Spiel ist sofort beendet, wenn BLAU gewürfelt wird.
Es wird <u>höchstens</u> dreimal mit diesem Würfel gewürfelt.



3.5 Erstellen Sie für dieses Spiel ein vollständiges Baumdiagramm mit allen Zweigwahrscheinlichkeiten. **/7**

3.6 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse: **/6**
E_1: „Es wird genau zweimal GRÜN gewürfelt“.
E_2: „Es wird mindestens einmal ROT gewürfelt“.
E_3: „Es wird <u>nicht</u> dreimal dieselbe Farbe gewürfelt“.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Dieses Würfelspiel wird an zwei befreundeten Berliner Schulen gespielt.
In der Schule in Pankow wurde es von 56 Spielern gespielt.
75 % von ihnen gefiel dieses Spiel.
In der Schule in Kreuzberg hat das Spiel 20 % der 60 Spieler nicht gefallen.

3.7 Erstellen Sie eine Vierfeldertafel, die diesen Sachverhalt darstellt. Benennen Sie die verwendeten Abkürzungen. **/5**

3.8 Von den Spielern der beiden Schulen wird eine Person zufällig ausgewählt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser Person das Spiel nicht gefallen hat. **/2**

3.9 Aus der Gruppe der Spieler, denen das Spiel gefallen hat, wird zufällig ein Spieler ausgewählt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser Spieler aus Kreuzberg kommt. **/2**

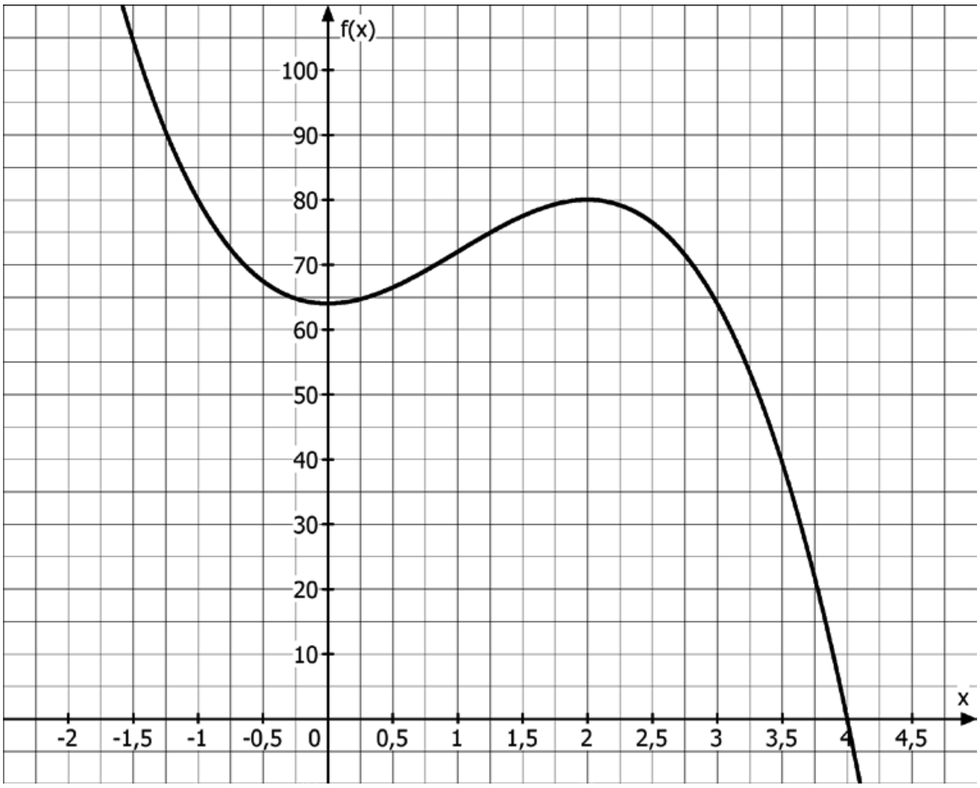
Abschlussprüfung Fachoberschule 2023
Mathematik

Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Familie | BERLIN

Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag A

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
1.1	$f(x) \to -\infty$ für $x \to \infty$; $f(x) \to \infty$ für $x \to -\infty$	2		
1.2	$S_y(0 \mid 64)$ $0 = (4 - x) \cdot (4x^2 + 4x + 16)$ $0 = 4 - x$; $x_N = 4$ $0 = 4x^2 + 4x + 16$ $0 = x^2 + x + 4$ $\frac{p^2}{4} - q = \frac{1}{4} - 4 < 0$, also hat die quadratische Gleichung keine Lösung.	1 4		
1.3	$f'(x) = -12x^2 + 24x$ $0 = -12x^2 + 24x$ $x_{E1} = 0$ $12x = 24$ $x_{E2} = 2$ $f''(x) = -24x + 24$ $f''(x_{E1}) = -24 \cdot 0 + 24 = 24 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt $f''(x_{E2}) = -24 \cdot 2 + 24 = -24 < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt $f(0) = -4 \cdot 0^3 + 12 \cdot 0^2 + 64 = 64$ $f(2) = -4 \cdot 2^3 + 12 \cdot 2^2 + 64 = 80$ $T(0 \mid 64)$; $H(2 \mid 80)$		8	
1.4	$f''(1) = -24 \cdot 1 + 24 = 0$ $f'''(x) = -24$; $f'''(1) = -24 \neq 0$; Wendestelle bei $x = 1$ $f'(1) = m = -12 \cdot 1^2 + 24 \cdot 1 = 12$ $f(1) = -4 \cdot 1^3 + 12 \cdot 1^2 + 64 = 72$ $72 = 12 \cdot 1 + n$ $n = 60 \Rightarrow t_W(x) = 12x + 60$		2 3	

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1.5</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$-1{,}5$</td><td>$-1{,}0$</td><td>0</td><td>1,0</td><td>2,0</td><td>3,0</td><td>4,0</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>104,5</td><td>80</td><td>64</td><td>72</td><td>80</td><td>64</td><td>0</td></tr>
</table>


</td><td>2

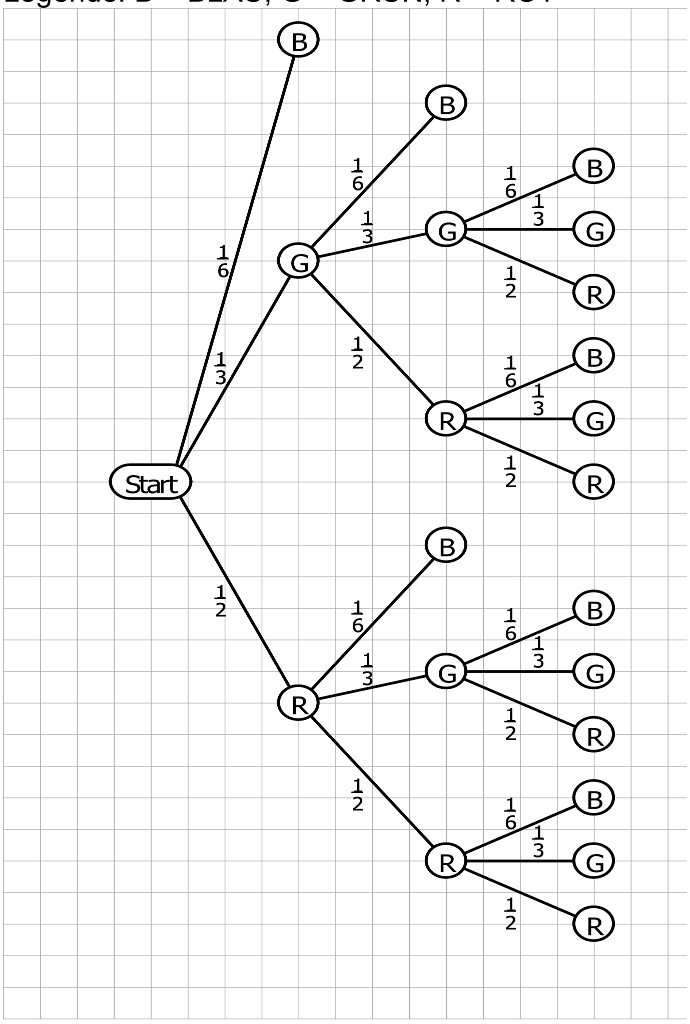
3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.6</td><td>Da die Akkuladung nicht negativ werden kann, ist lediglich der Zeitraum bis 16:00 Uhr (x_N) sinnvoll. Zudem kann die Akkuladung 100 % ($f(x) = 100$) nicht überschreiten. 10:35 Uhr entspricht $x = -\frac{85}{60} = -\frac{17}{12}$.
$f\left(-\frac{17}{12}\right) \approx 99{,}5$

Auch alternative Lösungen (z. B. grafisch) sind möglich.</td><td></td><td></td><td>3</td></tr>
<tr><td>1.7</td><td>12:00 Uhr bis 14:00 Uhr
In diesem Zeitraum steigt der Graph der Funktion f.</td><td></td><td></td><td>3</td></tr>
<tr><td>1.8</td><td>$87{,}9 = -\frac{1}{10} \cdot 3^4 + a \cdot 3^2 + 60$
$87{,}9 = -8{,}1 + 9a + 60$
$36 = 9a$
$a = 4$</td><td></td><td></td><td>2</td></tr>
</table>

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
1.9	$0 = -\frac{1}{10}x^4 + 4x^2 + 60$ $0 = -\frac{1}{10}z^2 + 4z + 60$ $0 = z^2 - 40z - 600$ $z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 20 \pm \sqrt{(20)^2 + 600}$ $z_1 \approx 51{,}62$; $z_2 \approx -11{,}62$ $x_N \approx 7{,}18$ Nach insgesamt 7,18 Stunden ist der Akku wieder vollständig entladen.		7	
	Mögliche BE	12	20	8
	Summe Aufgabe	40		

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
2.1	$f(-1) = 0{,}5\cdot(-1)^3 - 2{,}5\cdot(-1)^2 - 1 + 4 = 0$ $f(2) = 0{,}5\cdot(2)^3 - 2{,}5\cdot(2)^2 + 2 + 4 = 0$ $f(4) = 0{,}5\cdot(4)^3 - 2{,}5(4)^2 + 4 + 4 = 0$	3		
2.2	$F(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x$ $A = \int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x + \left\lvert \int_{2}^{4} f(x)\mathrm{d}x \right\rvert$ $F(-1) = -\frac{61}{24} \approx -2{,}54$ $F(2) = \frac{16}{3} \approx 5{,}33$ $F(4) = \frac{8}{3} \approx 2{,}67$ $A \approx 5{,}33 - (-2{,}54) + \lvert 2{,}67 - 5{,}33 \rvert \approx 7{,}87 + 2{,}66 \approx 10{,}53$ Der Flächeninhalt der Gesamtfläche beträgt ca. 10,53 FE.		6	
2.3	$S_Y(0\|2)$; $N_1(-1\|0)$; $N_2(4\|0)$ $y = a\cdot(x - x_{N1})\cdot(x - x_{N2})$ $2 = a\cdot(0 - (-1))\cdot(0 - 4)$ $2 = -4\cdot a \qquad a = -0{,}5$ $y = -0{,}5\cdot(x + 1)\cdot(x - 4)$ $y = -0{,}5\cdot(x^2 - 3x - 4)$ $g(x) = -0{,}5x^2 + 1{,}5x + 2$ Auch andere Lösungsansätze sind möglich.			5
2.4	$f(x) = g(x)$ $0{,}5x^3 - 2{,}5x^2 + x + 4 = -0{,}5x^2 + 1{,}5x + 2$ $0{,}5x^3 - 2x^2 - 0{,}5x + 2 = 0$ Horner oder Polynomdivision $x_1 = -1$ $\begin{array}{lcccc} & 0{,}5 & -2 & -0{,}5 & 2 \\ x_{S1} = -1 & & -0{,}5 & 2{,}5 & -2 \\ & 0{,}5 & -2{,}5 & 2 & 0 \end{array}$ $0 = 0{,}5x^2 - 2{,}5x + 2 \quad \|:0{,}5$ $0 = x^2 - 5x + 4 \quad \|$ pq-Formel $x_{2/3} = 2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 - 4} = 2{,}5 \pm 1{,}5$ $x_{S2} = 1; \qquad x_{S3} = 4$		7	

Teilaufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
2.5	$A_1 = \int_{-1}^{4} g(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + 2x\right]_{-1}^{4} = \frac{28}{3} - \left(-\frac{13}{12}\right) = \frac{125}{12} = 10{,}42$ $G(-1) = -\frac{13}{12}; G(4) = \frac{28}{3}$ Der Flächeninhalt unter g beträgt 10,42 FE.	3		
2.6	$A_2 = \int_{-1}^{1} g(x)\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x$ $A_2 = \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + 2x\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x\right]_{1}^{2}$ $A_2 = \left\lvert\frac{31}{12} - \left(-\frac{13}{12}\right)\right\rvert + \left\lvert\frac{16}{3} - \frac{91}{24}\right\rvert = \frac{11}{3} + \frac{37}{24} = \frac{125}{24} = 5{,}21$ $A_1 = 2 \cdot A_2 \implies A_3 = A_2$ Der Flächeninhalt der Fläche A_2 entspricht genau der Hälfte der Fläche von A_1. Demzufolge ist A_3 genau so groß wie A_2.		4	2
	Mögliche BE	6	17	7
	Summe Aufgabe	30		

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
3.1	$P(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4} = 0{,}25$	2		
3.2	$P(KKZ;KZK;ZKK) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8} = 0{,}375$		2	
3.3	$G = 3\,€ \cdot 0{,}25 = 0{,}75$ Die Spieler können bei 1 € Einsatz mit 0,75 € Auszahlung rechnen. Das Spiel ist nicht fair, da der Einsatz größer als die Auszahlung ist.		2	
3.4	$1 = x\,€ \cdot 0{,}25$ $x = 4\,€$ Bei einer Auszahlung von 4,00 € wäre das Spiel fair.			2
3.5	Baumdiagramm Legende: B = BLAU; G = GRÜN; R = ROT  *Hinweis: Eine andere Reihenfolge der Komponenten im Baumdiagramm ist auch richtig.*		7	

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-aufgabe</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>3.6</td><td>$P(E_1) = P(GGR;GGB;GRG;RGG) = 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{27}$
$P(E_2) = P(GGR;GR\ ;R) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{13}{18}$
$P(E_3) = 1 - P(RRR;GGG) = 1 - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3\right) = \frac{181}{216}$</td><td></td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td>3.7</td><td>PS: Schule aus Pankow G: Spiel hat gefallen
KS: Schule aus Kreuzberg NG: Spiel hat nicht gefallen
<table>
<tr><th></th><th>PS</th><th>KS</th><th>∑</th></tr>
<tr><td>G</td><td>42</td><td>48</td><td>90</td></tr>
<tr><td>NG</td><td>14</td><td>12</td><td>26</td></tr>
<tr><td>∑</td><td>56</td><td>60</td><td>116</td></tr>
</table>
fett: aus dem Text entnommen</td><td>5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3.8</td><td>$P(NG) = \frac{26}{116} \approx 0{,}22$</td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>3.9</td><td>$P_G(KS) = \frac{48}{90} \approx 0{,}53$</td><td></td><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td>Mögliche BE</td><td>7</td><td>19</td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe Aufgabe</td><td colspan="3">30</td></tr>
</table>